Otto Forster

Analysis 1

vieweg studium

Grundkurs Mathematik

Berater:
Martin Aigner, Peter Gritzmann, Volker Mehrmann
und Gisbert Wüstholz

Lineare Algebra
von Gerd Fischer

Übungsbuch zur Linearen Algebra
von Hannes Stoppel und Birgit Griese

Analytische Geometrie
von Gerd Fischer

Analysis 1
von Otto Forster

Übungsbuch zur Analysis 1
von Otto Forster und Rüdiger Wessoly

Analysis 2
von Otto Forster

Übungsbuch zur Analysis 2
von Otto Forster und Thomas Szymczak

Numerische Mathematik für Anfänger
von Gerhard Opfer

Numerische Mathematik
von Matthias Bollhöfer und Volker Mehrmann

vieweg

Otto Forster

Analysis 1

Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen

9., überarbeitete Auflage

Mit 55 Abbildungen

vieweg

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Otto Forster
Ludwig-Maximilians-Universität München
Mathematisches Institut
Theresienstraße 39
80333 München
forster@mathematik.uni-muenchen.de

1. Auflage 1976
   2 Nachdrucke
2., durchgesehene Auflage 1979
3., durchgesehene Auflage 1980
   2 Nachdrucke
4., durchgesehene Auflage 1983
   7 Nachdrucke
5., überarbeitete Auflage 1999
   1 Nachdruck
6., verbesserte Auflage 2001
   2 Nachdrucke
7., verbesserte Auflage 2004
8., verbesserte Auflage 2006
9., überarbeitete Auflage 2008

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Susanne Jahnel

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.vieweg.de

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Tesinská Tiskárna, Tschechien
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier
Printed in the Czech Republic

ISBN 978-3-8348-0395-5

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist entstanden aus der Ausarbeitung einer Vorlesung, die ich im WS 1970/71 für Studenten der Mathematik und Physik des ersten Semesters an der Universität Regensburg gehalten habe. Diese Ausarbeitung wurde später von verschiedenen Kollegen als Begleittext zur Vorlesung benutzt.

Der Inhalt umfaßt im wesentlichen den traditionellen Lehrstoff der Analysis-Kurse des ersten Semesters an deutschen Universitäten und Technischen Hochschulen. Bei der Stoffauswahl wurde angestrebt, dem konkreten mathematischen Inhalt, der auch für die Anwendungen wichtig ist, vor einem großen abstrakten Begriffsapparat den Vorzug zu geben und dabei gleichzeitig in systematischer Weise möglichst einfach und schnell zu den grundlegenden Begriffen (Grenzwert, Stetigkeit, Differentiation, Riemannsches Integral) vorzudringen und sie mit vielen Beispielen zu illustrieren. Deshalb wurde auch die Einführung der elementaren Funktionen vor die Abschnitte über Differentiation und Integration gezogen, um dort genügend Beispielmaterial zur Verfügung zu haben. Auf die numerische Seite der Analysis (Approximation von Größen, die nicht in endlich vielen Schritten berechnet werden können) wird an verschiedenen Stellen eingegangen, um den Grenzwertbegriff konkreter zu machen.

Der Umfang des Stoffes ist so angelegt, daß er in einer vierstündigen Vorlesung in einem Wintersemester durchgenommen werden kann. Die einzelnen Paragraphen entsprechen je nach Länge einer bis zwei Vorlesungs-Doppelstunden. Bei Zeitmangel können die §§ 17 und 23 sowie Teile der §§ 16 (Konvexität) und 20 (Gamma-Funktion) weggelassen werden.

Für seine Unterstützung möchte ich mich bei Herrn D. Leistner bedanken. Er hat die seinerzeitige Vorlesungs-Ausarbeitung geschrieben, beim Lesen der Korrekturen geholfen und das Namens- und Sachverzeichnis erstellt.

Münster, Oktober 1975 O. Forster

Vorwort zur 5. Auflage

Die erste Auflage dieses Buches erschien 1976. Seitdem hat es viele Jahrgänge von Studentinnen und Studenten der Mathematik und Physik beim Beginn ihres Analysis-Studiums begleitet. Aufgrund der damaligen Satz-Technik waren bei Neuauflagen nur geringfügige Änderungen möglich. Die einzige wesentliche Neuerung war das Erscheinen des Übungsbuchs zur Analysis 1 [FW].

Bei der jetzigen Neuauflage erhielt der Text nicht nur eine neue äußere Form (TEX-Satz), sondern wurde auch gründlich überarbeitet, um ihn wo möglich noch verständlicher zu machen. An verschiedenen Stellen wurden Bezüge zur Informatik hergestellt. So erhielt §5, in dem u.a. die Entwicklung reeller Zahlen als Dezimalbrüche (und allgemeiner b-adische Brüche) behandelt wird, einen Anhang über die Darstellung reeller Zahlen im Computer. In §9 finden sich einige grundsätzliche Bemerkungen zur Berechenbarkeit reeller Zahlen. Verschiedene numerische Beispiele wurden durch Programm-Code ergänzt, so dass die Rechnungen direkt am Computer nachvollzogen werden können. Dabei wurde der PASCAL-ähnliche Multipräzisions-Interpreter ARIBAS benutzt, den ich ursprünglich für das Buch [Fo] entwickelt habe, und der frei über das Internet erhältlich ist (Einzelheiten dazu auf Seite VIII). Die Programm-Beispiele lassen sich aber leicht auf andere Systeme, wie Maple oder Mathematica übertragen. In diesem Zusammenhang sei auch auf das Buch [BM] hingewiesen.

Insgesamt wurden aber für die Neuauflage die bewährten Charakteristiken des Buches beibehalten, nämlich ohne zu große Abstraktionen und ohne Stoffüberladung die wesentlichen Inhalte gründlich zu behandeln und sie mit konkreten Beispielen zu illustrieren. So hoffe ich, dass das Buch auch weiterhin seinen Leserinnen und Lesern den Einstieg in die Analysis erleichtern wird.

Wertvolle Hilfe habe ich von Herrn H. Stoppel erhalten. Er hat seine TEX-Erfahrung als Autor des Buches [SG] eingebracht und den Hauptteil der TEXnischen Herstellung der Neuauflage übernommen. Viele der Bilder wurden von Herrn V. Solinus erstellt. Ihnen sei herzlich gedankt, ebenso Frau Schmickler-Hirzebruch vom Vieweg-Verlag, die sich mit großem Engagement für das Zustandekommen der Neuauflage eingesetzt hat.

München, April 1999 Otto Forster

Vorwort zur 9. Auflage

Neben der Korrektur bekannt gewordener Druckfehler (den vielen aufmerksamen LeserInnen sei Dank!), habe ich für die 6. bis 9. Auflage den Text an verschiedenen Stellen weiter überarbeitet und ergänzt. Außerdem habe ich neue Abbildungen und Übungsaufgaben hinzugefügt.

München, November 2007 Otto Forster

Software zum Buch

Die Programm-Beispiele des Buches sind für ARIBAS geschrieben. Dies ist ein Multipräzisions-Interpreter mit einer PASCAL-ähnlichen Syntax. Er ist (unter der GNU General Public License) frei über das Internet erhältlich. Es gibt Versionen von ARIBAS für verschiedene Plattformen, wie MsWindows (von Windows95 über WindowsNT bis WindowsXP), LINUX und andere UNIX-Systeme. Für diejenigen, die hinter die Kulissen sehen wollen, ist auch der C-Source-Code von ARIBAS verfügbar. Um ARIBAS zu erhalten, gehe man auf die WWW-Homepage des Verfassers,

`http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster`

und von dort zum Unterpunkt Software/ARIBAS. Dort finden sich weitere Informationen. Da ARIBAS ein kompaktes System ist, muss nur etwa 1/4 MB heruntergeladen werden.

Von der oben genannten Homepage gelangt man über den Unterpunkt Bücher/ Analysis auch zur Homepage dieses Buches. Von dort sind die Listings der Programm-Beispiele erhältlich, so dass sie nicht mühsam abgetippt werden müssen. Im Laufe der Zeit werden noch weitere Listings zu numerischen Übungsaufgaben und zu Ergänzungen zum Text dazukommen. Ebenfalls wird dort eine Liste der unvermeidlich zutage tretenden *Errata* abgelegt werden. Die aufmerksamen Leserinnen und Leser seien ermuntert, mir Fehler per Email an folgende Adresse zu melden:

`forster@mathematik.uni-muenchen.de`

Inhaltsverzeichnis

§ 1 Vollständige Induktion

Der Beweis durch vollständige Induktion ist ein wichtiges Hilfsmittel in der Mathematik. Es kann häufig bei Problemen folgender Art angewandt werden: Es soll eine Aussage $A(n)$ bewiesen werden, die von einer natürlichen Zahl $n \geqslant 1$ abhängt. Dies sind in Wirklichkeit unendlich viele Aussagen $A(1), A(2), A(3), \ldots$, die nicht alle einzeln bewiesen werden können. Hier hilft die vollständige Induktion.

Beweisprinzip der vollständigen Induktion

Sei n_0 eine ganze Zahl und $A(n)$ für jedes $n \geqslant n_0$ eine Aussage. Um $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$ zu beweisen, genügt es, zu zeigen:

(I0) $A(n_0)$ *ist richtig* (Induktions-Anfang).

(I1) *Für ein beliebiges* $n \geqslant n_0$ *gilt: Falls* $A(n)$ *richtig ist, so ist auch* $A(n+1)$ *richtig* (Induktions-Schritt).

Die Wirkungsweise dieses Beweisprinzips ist leicht einzusehen: Nach (I0) ist zunächst $A(n_0)$ richtig. Wendet man (I1) auf den Fall $n = n_0$ an, erhält man die Gültigkeit von $A(n_0+1)$. Wiederholte Anwendung von (I1) liefert dann die Richtigkeit von $A(n_0+2)$, $A(n_0+3)$, …, usw.

Als erstes Beispiel beweisen wir damit eine nützliche Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

Satz 1. *Für jede natürliche Zahl n gilt:*

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $S(n) = 1+2+\ldots+n$ und zeigen die Gleichung $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ durch vollständige Induktion.

Induktions-Anfang $n = 1$. Es ist $S(1) = 1$ und $\frac{1(1+1)}{2} = 1$, also gilt die Formel für $n = 1$.

Induktions-Schritt $n \to n+1$. Wir nehmen an, dass $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ gilt (Induktions-Voraussetzung) und müssen zeigen, dass daraus die Formel $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ folgt. Dies sieht man so:

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + (n+1) \underset{\mathrm{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Dabei deutet $\underset{\text{IV}}{=}$ an, dass an dieser Stelle die Induktions-Voraussetzung benutzt wurde.

Der Satz 1 erinnert an die bekannte Geschichte über C.F. Gauß, der als kleiner Schüler seinen Lehrer dadurch in Erstaunen versetzte, dass er die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen, in kürzester Zeit im Kopf löste. Gauß verwendete dazu keine vollständige Induktion, sondern benutzte folgenden Trick: Er fasste den ersten mit dem letzten Summanden, den zweiten mit dem vorletzten zusammen, usw.

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+100 &= (1+100)+(2+99)+\ldots+(50+51) \\ &= 50\cdot 101 = 5050\,. \end{aligned}$$

Natürlich ergibt sich dasselbe Resultat mit der Formel aus Satz 1.

Summenzeichen. Formeln wie in Satz 1 lassen sich oft prägnanter unter Verwendung des Summenzeichens schreiben. Seien $m \leqslant n$ ganze Zahlen. Für jede ganze Zahl k mit $m \leqslant k \leqslant n$ sei a_k eine reelle Zahl. Dann setzt man

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n\,.$$

(Dabei bedeutet $X := A$, dass X nach Definition gleich A ist.) Für $m = n$ besteht die Summe aus dem einzigen Summanden a_m. Es ist zweckmäßig, für $n = m-1$ folgende Konvention einzuführen:

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0 \qquad \text{(leere Summe)}.$$

Man kann die etwas unbefriedigenden Pünktchen $\ldots$ in der Definition des Summenzeichens vermeiden, wenn man *Definition durch vollständige Induktion* benützt: Für den Induktions-Anfang setzt man $\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0$ und verwendet als Induktionsschritt

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k := \Big(\sum_{k=m}^{n} a_k\Big) + a_{n+1} \qquad \text{für alle } n \geqslant m-1\,.$$

Als natürliche Zahlen bezeichnen wir alle Elemente der Menge

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

der nicht-negativen ganzen Zahlen (einschließlich der Null). Mit

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$

wird die Menge aller ganzen Zahlen bezeichnet.

Nun lässt sich Satz 1 so aussprechen: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(Für $n = 0$ gilt die Formel trivialerweise, da beide Seiten der Gleichung gleich null sind.)

Bildet man die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, $\ldots$, so stellt man fest, dass sich stets eine Quadratzahl ergibt. Dass dies allgemein richtig ist, beweisen wir wieder durch vollständige Induktion.

Satz 2. *Für alle natürlichen Zahlen n gilt* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

Beweis. Induktions-Anfang $n = 0$.

$$\sum_{k=1}^{0}(2k-1) = 0 = 0^2.$$

Induktions-Schritt $n \to n+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + (2(n+1)-1) \underset{\mathrm{IV}}{=} n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2, \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Definition (Fakultät)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ setzt man

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n.$$

Das Produktzeichen ist ganz analog zum Summenzeichen definiert. Man setzt (Induktions-Anfang)

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1 \qquad \text{(leeres Produkt)},$$

und (Induktions-Schritt)

$$\prod_{k=m}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) a_{n+1} \qquad \text{für alle } n \geqslant m-1.$$

(Das leere Produkt wird deshalb als 1 definiert, da die Multiplikation mit 1 dieselbe Wirkung hat wie wenn man überhaupt nicht multipliziert.)

Insbesondere ist $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24, \ldots$.

Satz 3. *Die Anzahl aller möglichen Anordnungen einer n-elementigen Menge* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ *ist gleich* $n!$.

Beweis durch vollständige Induktion.

Induktions-Anfang $n = 1$. Eine einelementige Menge besitzt nur eine Anordnung ihrer Elemente. Andrerseits ist $1!$ ebenfalls gleich 1.

Induktions-Schritt $n \to n+1$. Die möglichen Anordnungen der $(n+1)$-elementigen Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ zerfallen folgendermaßen in $n+1$ Klassen $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \ldots, n+1$: Die Anordnungen der Klasse $\mathcal{C}_k$ haben das Element A_k an erster Stelle, bei beliebiger Anordnung der übrigen n Elemente. Nach Induktions-Voraussetzung besteht jede Klasse aus $n!$ Anordnungen. Die Gesamtzahl aller möglichen Anordnungen von $\{A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}\}$ ist also gleich $(n+1)\,n! = (n+1)!$, q.e.d.

Bemerkung. Die beim Induktions-Schritt benützte Überlegung kann man dazu verwenden, alle Anordnungen systematisch aufzuzählen (wir schreiben kurz k statt A_k).

$\underline{n=2}$

1 2   2 1

$\underline{n=3}$

1 2 3	2 1 3	3 1 2
1 3 2	2 3 1	3 2 1

$\underline{n=4}$

1 2 3 4	2 1 3 4	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 4 3	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

Definition. Für natürliche Zahlen n und k setzt man

$$\binom{n}{k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n-j+1}{j} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}.$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen *Binomial-Koeffizienten* wegen ihres Auftretens im binomischen Lehrsatz (vgl. den folgenden Satz 5).

Aus der Definition folgt unmittelbar

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{für alle } n \geqslant 0,$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{für } k > n, \quad \text{sowie}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Definiert man noch $\binom{n}{k} := 0$ für $k < 0$, so gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Hilfssatz. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Für $k \geqslant n$ und $k \leqslant 0$ verifiziert man die Formel unmittelbar. Es bleibt also der Fall $0 < k < n$ zu betrachten. Dann ist

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$$
$$= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Satz 4. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ist gleich $\binom{n}{k}$.*

Bemerkung. Daraus folgt auch, dass die Zahlen $\binom{n}{k}$ ganz sind, was aus ihrer Definition nicht unmittelbar ersichtlich ist.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung durch vollständige Induktion nach n.

Induktions-Anfang $n = 1$. Die Menge $\{A_1\}$ besitzt genau eine nullelementige Teilmenge, nämlich die leere Menge $\emptyset$, und genau eine einelementige Teilmenge, nämlich $\{A_1\}$. Anderseits ist auch $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. (Übrigens gilt der Satz auch für $n = 0$.)

Induktions-Schritt $n \to n+1$. Die Behauptung sei für Teilmengen der n-elementigen Menge $M_n := \{A_1, \ldots, A_n\}$ schon bewiesen. Wir betrachten nun die k-elementigen Teilmengen von $M_{n+1} := \{A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}\}$. Für $k = 0$ und $k = n+1$ ist die Behauptung trivial, wir dürfen also $1 \leqslant k \leqslant n$ annehmen. Jede k-elementige Teilmenge von M_{n+1} gehört zu genau einer der folgenden Klassen: $\mathcal{T}_0$ besteht aus allen k-elementigen Teilmengen von M_{n+1}, die A_{n+1} nicht enthalten, und $\mathcal{T}_1$ aus denjenigen k-elementigen Teilmengen, die A_{n+1} enthalten. Die Anzahl der Elemente von $\mathcal{T}_0$ ist gleich der Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M_n, also nach Induktions-Voraussetzung gleich $\binom{n}{k}$. Da die Teilmengen der Klasse $\mathcal{T}_1$ alle das Element A_{n+1} enthalten, und die übrigen $k-1$ Elemente der Menge M_n entnommen sind, besteht $\mathcal{T}_1$ nach Induktions-Voraussetzung aus $\binom{n}{k-1}$ Elementen. Insgesamt gibt es also (unter Benutzung des Hilfssatzes)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

k-elementige Teilmengen von M_{n+1}, q.e.d.

Beispiel. Es gibt

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816$$

6-elementige Teilmengen einer Menge von 49 Elementen. Die Chance, beim Lotto "6 aus 49" die richtige Kombination zu erraten, ist also etwa 1 : 14 Millionen.

Satz 5 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Seien x, y reelle Zahlen und n eine natürliche Zahl. Dann gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n.
Induktions-Anfang $n = 0$. Da nach Definition $a^0 = 1$ für jede reelle Zahl a (leeres Produkt), ist $(x+y)^0 = 1$ und

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^{n-k} y^k = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1\,.$$

Induktions-Schritt $n \to n+1$.

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n x + (x+y)^n y\,.$$

Für den ersten Summanden der rechten Seite erhält man unter Benutzung der Induktions-Voraussetzung

$$(x+y)^n x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\binom{n}{n+1} = 0$. Für die Umformung des zweiten Summanden verwenden wir die offensichtliche Regel

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$$

über die Indexverschiebung bei Summen.

$$(x+y)^n y = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k.$$

Addiert man den Summanden $\binom{n}{-1} x^{n+1} y^0 = 0$, erhält man

$$(x+y)^n y = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k.$$

Insgesamt ergibt sich, wenn man noch $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ benutzt (Hilfssatz),

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Für die ersten n lautet der binomische Lehrsatz ausgeschrieben

$$\begin{aligned} &(x+y)^0 = 1, \\ &(x+y)^1 = x+y, \\ &(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2, \\ &(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3, \\ &(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4, \text{ usw.} \end{aligned}$$

Die auftretenden Koeffizienten kann man im sog. *Pascalschen Dreieck* anordnen.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

Aufgrund der Beziehung $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ ist jede Zahl im Inneren des Dreiecks die Summe der beiden unmittelbar über ihr stehenden.

Folgerungen aus dem binomischen Lehrsatz. *Für alle $n \geqslant 1$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0\,.$$

Man erhält dies, wenn man $x = y = 1$ bzw. $x = 1, y = -1$ setzt. Die erste dieser Formeln lässt sich nach Satz 4 kombinatorisch interpretieren: Da $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge angibt, besitzt eine n-elementige Menge insgesamt 2^n Teilmengen.

Satz 6 (geometrische Reihe)**.** *Für $x \neq 1$ und jede natürliche Zahl n gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n.

Induktions-Anfang $n = 0$.

$$\sum_{k=0}^{0} x^k = 1 = \frac{1 - x^{0+1}}{1 - x}.$$

Induktions-Schritt $n \to n + 1$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{(n+1)+1}}{1 - x}, \quad \text{q.e.d.}$$

AUFGABEN

1.1. Seien n, k natürliche Zahlen mit $n \geqslant k$. Man beweise

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}.$$

1.2. Für eine reelle Zahl x und eine natürliche Zahl k werde definiert

$$\binom{x}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{x-j+1}{j} = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!},$$

insbesondere $\binom{x}{0} = 1$. Man beweise für alle reellen Zahlen x, y und alle natürlichen Zahlen n

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n-k}\binom{y}{k}.$$

1.3. Ersetzt man im Pascalschen Dreieck die Einträge durch kleine rechteckige weiße und schwarze Kästchen, je nachdem der entsprechende Binomial-Koef-

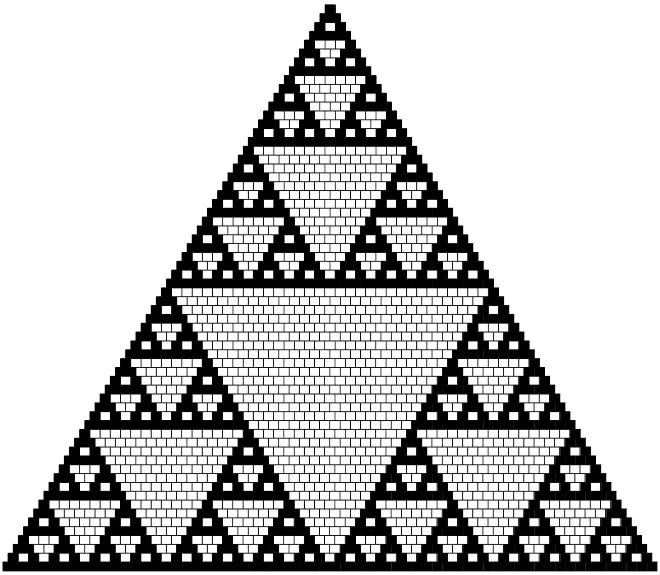

Bild 1.1 Pascalsches Dreieck modulo 2

fizient gerade oder ungerade ist, so entsteht eine interessante Figur, siehe Bild 1.1. Wir bezeichnen das Kästchen, das dem Binomial-Koeffizienten $\binom{k}{\ell}$ entspricht, mit (k,ℓ). In der Figur sind alle Kästchen (k,ℓ) bis $k = 63$ dargestellt. Man beweise dazu:

a) $\binom{2^n-1}{\ell}$ ist ungerade für alle $0 \leqslant \ell \leqslant 2^n-1$, d.h. die Zeile mit $k = 2^n - 1$ ist vollständig schwarz.

b) $\binom{2^n}{\ell}$ ist gerade für alle $1 \leqslant \ell \leqslant 2^n - 1$.

c) $\binom{2^n+\ell}{\ell}$ ist ungerade für alle $0 \leqslant \ell \leqslant 2^n - 1$.

d) Das Dreieck mit den Ecken $(0,0),(2^n-1,0),(2^n-1,2^n-1)$ geht durch Verschiebung $(k,\ell) \mapsto (2^n+k,\ell)$in das Dreieck $(2^n,0),(2^{2n}-1,0),(2^{2n}-1,2^n-1)$ mit demselben Farbmuster über.

e) Das Dreieck mit den Ecken $(0,0),(2^n-1,0),(2^n-1,2^n-1)$ weist außerdem eine Symmetrie bzgl. Drehungen um den Mittelpunkt mit Winkel 120 Grad und 240 Grad auf, genauer: Durch die Transformation

$$(k,\ell) \mapsto (2^n-1-\ell, k-\ell), \qquad (0 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant 2^n - 1)$$

geht das Dreieck unter Erhaltung des Farbmusters in sich über, d.h. die Binomial-Koeffizienten

$$\binom{k}{\ell} \quad \text{und} \quad \binom{2^n-1-\ell}{k-\ell}$$

sind entweder beide gerade oder beide ungerade.

1.4. In Analogie zur vorigen Aufgabe ersetze man im Pascalschen Dreieck die Einträge durch Kästchen in den Farben rot, schwarz, grün nach folgender Vorschrift: Man schreibe den Binomial-Koeffizienten $\binom{k}{\ell}$ in der Form $\binom{k}{\ell} = 3m+i$ mit einer ganzen Zahl m und $i = 0,1,2$. Für $i = 0$ sei die Farbe rot, für $i = 1$ schwarz und für $i = 2$ grün. Man betrachte die entstehenden Muster und beweise die sich aufdrängenden Vermutungen, z.B.

Der Binomial-Koeffizient $\binom{3^n}{\ell}$ ist durch 3 teilbar für alle $1 \leqslant \ell \leqslant 3^n - 1$.

1.5. Man beweise die Summenformeln

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

1.6. Sei r eine natürliche Zahl. Man zeige:
Es gibt rationale Zahlen $a_{r1}, \ldots, a_{rr}$, so dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^r = \frac{1}{r+1} n^{r+1} + a_{rr} n^r + \ldots + a_{r1}\, n.$$

1.7. Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

1.8. Man beweise: Für alle natürlichen Zahlen N gilt

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N+n}.$$

1.9. Sei n eine natürliche Zahl. Wieviele Tripel (k_1, k_2, k_3) natürlicher Zahlen gibt es, die

$$k_1 + k_2 + k_3 = n$$

erfüllen?

1.10. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim Lotto „6 aus 49" alle 6 gezogenen Zahlen gerade (bzw. alle ungerade) sind?

1.11. Es werde zufällig eine 7-stellige Zahl gewählt, wobei jede Zahl von 1 000 000 bis 9 999 999 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftrete. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 7 Ziffern paarweise verschieden sind?

1.12. Man zeige, dass nach dem Gregorianischen Kalender (d.h. Schaltjahr, wenn die Jahreszahl durch 4 teilbar ist, mit Ausnahme der Jahre, die durch 100 aber nicht durch 400 teilbar sind) der 13. eines Monats im langjährigen Durchschnitt häufiger auf einen Freitag fällt, als auf irgend einen anderen Wochentag. Hinweis: Der Geburtstag von Gauß, der 30. April 1777, war ein Mittwoch. (Diese Aufgabe ist weniger eine Übung zur vollständigen Induktion, als eine Übung im systematischen Abzählen.)